ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΑ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x,y)=x^4+16y^4-2(x-2y)^2$ έχει τρία κριτικά σημεία και να βρεθεί η φύση τους. Ειδικά για το (0,0) να δειχθεί ότι δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Λύση

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3-4(x-2y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 64y^3-4(x-2y)(-2)=0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned}x^3-x+2y=0\\ 8y^3+x-2y=0\end{aligned}\right\}$$

Προσθέτουμε την πρώτη εξίσωση στην δεύτερη και προκύπτει

$$\left.\begin{aligned}x^3-x+2y=0\\ x^3+8y^3=0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned}x^3-x+2y=0\\ (x+2y)\ \ (x^2-2xy+4y^2)=0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned}x^3-x+2y=0\\ x=-2y\end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}x^3-2x=0\\ x=-2y\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned}x=0 \text{ ή } x=\sqrt{2} \text{ ή } x=-\sqrt{2}\\ x=-2y\end{aligned}\right\}$$

Αρα έχουμε τα εξής κριτικά σημεία:

$$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2),\ (0,0)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2-4 & 8 \\ 8 & 8(24y^2-2) \end{vmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Delta = 64(3x^2-1)\ (12y^2-1)-64, \qquad f_{xx} = 12x^2-4$$

Ελεγχοι

Για το $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2)$ έχουμε $\Delta = 64\cdot 24 > 0$ και $f_{xx} = 12\cdot 2-4 > 0$ άρα στη θέση $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2)$ έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Για το $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2)$ έχουμε $\Delta = 64\cdot 24 > 0$ και $f_{xx} = 12\cdot 2-4 > 0$ άρα στη θέση $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2)$ έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Για το (0,0) έχουμε $\Delta = 64-64 = 0$ οπότε πάμε στον ορισμό (εφαρμόζουμε το Μ.σ.5.1

$$A = f(x,y)-f(0,0) = x^4+16y^4-2(x-2y)^2$$

Για $x=2y \implies A=16y^4+16y^4=32y^4$, άρα όταν το y παίρνει τιμές στην περιοχή του μηδενός και επί της ευθείας $x=2y$, έχουμε $A>0$ (i)

Για $x=-2y \implies A = 16y^4+16y^4-32y^2 = 32y^2(y^2-1)$

	-1		0		1	
+	|	-	|	-	|	+

Αρα όταν το y παίρνει τιμές στην περιοχή του μηδενός και επί της ευθείας $x=-2y$, έχουμε $A<0$ (ii).

Από τις σχέσεις (i) και (ii) συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ακρότατο στη θέση (0,0).

Μεθοδολογικό σχόλιο 5.1

Δείχνουμε από τον ορισμό ότι στη θέση (x_0,y_0) έχουμε ή όχι ακρότατο ως εξής: θεωρούμε τη διαφορά

$$A = f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

της οποίας εξετάζουμε το πρόσημο γύρω από το (x_0,y_0).

Συνήθως για (x_0,y_0) έχουμε το (0,0).

1) Αν μέσω ταυτοτήτων (π.χ. τετράγωνα) δείξουμε ότι σε περιοχή γύρω από το (x_0,y_0) ισχύει $A\geq 0$ ή $A\leq 0$, τότε έχουμε ακρότατο.

2) Επιλέγουμε καμπύλες που περνάνε από το (0,0), (π.χ. $y=\lambda x$, $y=\lambda x^2$)

α) Για $y=x$ έχουμε $f(x,y)=f(x,x)$, οπότε θα είναι $A=f(x,x)-f(0,0)$ και εξετάζουμε το πρόσημο γύρω από το 0 ως προς x.

β) Για $y=\lambda x$ έχουμε $f(x,y)=f(x,\lambda x)$ με κατάλληλο λ, οπότε $A=f(x,\lambda x)-f(0,0)$ και εξετάζουμε το πρόσημο γύρω από το 0 ως προς x.

Αν στο α) ή β) η διαφορά A παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές, τότε δεν έχουμε ακρότατο.